где $\nu(K) = \|K\|_{X\to Y} \cdot \|K^{-1}\|_{Y\to X}$ *– число обусловленности оператора* $K : X \to Y$*, а* $E_n(x^*)_X$ *– наилучшее приближение функции* $x^* \in X$ *алгебраическими полиномами степени не выше* $n-1$.

Литература

1. Габдулхаев Б. Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений I-го рода*. – Казань: Изд-во КГУ, 1994. – 288 с.

2. Габдулхаев Б. Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы*. – Казань: Изд-во КГУ, 1995. – 230 с.

3. Еникеева С. Р. *Об одном методе решения интегральных уравнений* // Известия вузов. Математика. – 2010. – № 2. – С. 14–19.

4. Еникеева С. Р. *Исследование сплайн–методов решения слабосингулярных интегральных уравнений* // Сб. трудов XXVII Межд. науч. конф. «Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-27». – Саратов: Саратовский гос. техн. унив. им. Ю.А. Гагарина, 2014. – С. 39–40.

METHOD OF THE LEAST SQUARES FOR SOLUTION OF WEAKLY SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND

S.R. Enikeeva

In this paper, a singular integral equation is investigated. We show that the least square method converges to the solution of this equation.

Keywords: weakly singular integral equations, least square method, polynomial approximation, convergence of the method.

УДК 514.764

ГЕОМЕТРИЯ 6-МЕРНОГО *h*-ПРОСТРАНСТВА ТИПА [(33)]

З.Х. Закирова[1]

1 *zakirova-kgeu@mail.ru*; Казанский государственный энергетический университет

Изучение геометрических свойств многомерных пространств является актуальной задачей, имеющей важное теоретическое и прикладное значение. Известно, что пространственно-временные симметрии порождают законы сохранения энергии, импульса и момента импульса. В частности, инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования приводят к фундаментальным полевым и механическим законам сохранения в форме квадратичных первых интегралов уравнений геодезических. Интерес к многомерным теориям также связан с развитием суперсимметричных теорий и теории супергравитации. Как известно, в основе суперсимметричных теорий лежит увеличение размерности используемого многообразия. Целью данной статьи является исследование 6-мерных псевдоримановых пространств $V^6(g_{ij})$ *с сигнатурой* $[++----]$*, которые допускают группы непрерывных преобразований, сохраняющих геодезические. В данной работе была найдена метрика* h*-пространства типа* $[(33)]$*, а также указан вид квадратичного первого интеграла уравнений геодезических этого* h*-пространства.*

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, псевдоримановы многообразия, системы дифференциальных уравнений с частными производными.

Псевдоримановы многообразия, для которых существуют нетривиальные решения $h_{ij} \neq cg_{ij}$ уравнений Эйзенхарта (см. [1])

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i},$$

называются *h-пространствами*. Чтобы найти псевдориманово пространство, допускающее негомотетическое инфинитезимальное проективное преобразование, нужно проинтегрировать уравнение Эйзенхарта. Задача определения таких пространств зависит от типа билинейной формы $L_X g$, определяемой характеристикой Сегре λ-матрицы $(h - \lambda g)$. Если характеристика тензора $L_X g$ есть $[abc...]$, то соответствующее пространство будем называть h-пространством типа $[abc...]$.

В работе применяется техника интегрирования в косонормальном репере, в котором уравнение Эйзенхарта имеет вид [2]

$$X_r \overline{a}_{pq} + \sum_{h=1}^{n} e_h(\overline{a}_{hq}\gamma_{\tilde{h}pr} + \overline{a}_{ph}\gamma_{\tilde{h}qr}) = \overline{g}_{pr} X_q\varphi + \overline{g}_{qr} X_p\varphi \quad (p,q,r = 1,\ldots,n),$$

где $X_r\varphi \equiv \underset{r}{\xi}^i \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \gamma_{pqr} = -\gamma_{qpr} = \underset{p}{\xi}_{i,j} \underset{q}{\xi}^i \underset{r}{\xi}^j, a_{ij} = h_{ij} - 2\varphi g_{ij}$, $\underset{i}{\xi}^j$ — компоненты косонормального репера, $\overline{g}_{pr} = e_p \delta_{\tilde{p}}{}^r$ и $\overline{a}_{pq}$ — канонические формы тензоров g_{pr}, a_{pq}, $\gamma^p_{lk} = e_p \gamma_{l\tilde{p}k}$ — компоненты связности в косонормальном репере X.

В случае h-пространства типа $[(33)]$ канонические значения выражаются формулами

$$\overline{g}_{ij} dx^i dx^j = e_3(2dx^1dx^3 + dx^{2^2}) + e_6(2dx^4dx^6 + dx^{5^2}),$$

$$\overline{a}_{ij} dx^i dx^j = e_3\lambda_3(2dx^1dx^3 + dx^{2^2}) + 2e_3 dx^2dx^3 + e_6\lambda_6(2dx^4dx^5 + dx^{5^2}) + 2e_6 dx^5dx^6,$$

где $e_1 = e_2 = e_3, e_4 = e_5 = e_6$, $e_i = \pm 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6$ – корни характеристического уравнения $det(a_{ij}(p) - \lambda g_{ij}(p)) = 0$.

Подставив в уравнение Эйзенхарата вместо $\overline{g}_{pq}$ и $\overline{a}_{pq}$ соответствующие канонические значения с учетом того, что в случае h-пространства типа $[(33)]$ $\tilde{1} = 3$, $\tilde{2} = 2$, $\tilde{3} = 1$, $\tilde{4} = 6$, $\tilde{5} = 5$, $\tilde{6} = 4$, получим систему уравнений

$$\gamma_{16r} = \gamma_{25r} = \gamma_{34r}, \quad \gamma_{26r} = \gamma_{35r}, \tag{1}$$

где $r = 1,...,6$, γ_{36r} произвольны, остальные инварианты γ_{pqr} равны нулю. Для h-пространства типа $[(33)]$ функция φ является постоянной и, следовательно, тензор h_{ij} будет ковариантно постоянным.

Для того чтобы система линейных дифференциальных уравнений в частных производных $X_q\theta = \underset{q}{\xi}^i \partial_i\theta = 0, (q = 1,\ldots,m, i = 1,\ldots,6, m < 6)$, где $\underset{q}{\xi}^i$ — компоненты косонормального репера, была вполне интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы все коммутаторы операторов системы (см. [1])

$$[X_q, X_r] = X_q X_r - X_r X_q = \sum_{p=1}^{6} e_p(\gamma_{pqr} - \gamma_{prq}) X_{\tilde{p}}$$

линейно выражались через операторы X_q.

Для h-пространства типа [(33)] коммутаторы операторов имеют следующий вид:

$$(X_\alpha, X_\beta) = e_6(\gamma_{6\alpha\beta} - \gamma_{6\beta\alpha})X_4 + e_5(\gamma_{5\alpha\beta} - \gamma_{5\beta\alpha})X_5 - e_4\gamma_{4\beta\alpha}X_6,$$

$$(X_\nu, X_\mu) = e_3(\gamma_{3\nu\mu} - \gamma_{3\mu\nu})X_1 + e_2(\gamma_{2\nu\mu} - \gamma_{2\mu\nu})X_2 - e_1\gamma_{1\mu\nu}X_3,$$

$$(X_\alpha, X_\mu) = -e_3\gamma_{3\mu\alpha}X_1 - e_2\gamma_{2\mu\alpha}X_2 - e_1\gamma_{1\mu\alpha}X_3 + e_6\gamma_{6\alpha\mu}X_4 + e_5\gamma_{5\alpha\mu}X_5 + e_4\gamma_{4\alpha\mu}X_6, \quad (2)$$

где $\alpha, \beta = 1, 2, 3$, $\nu, \mu = 4, 5, 6$.

Составляя вполне интегрируемые системы, определим допускаемые этими системами независимые решения, которые обозначим через θ^i. После чего, с помощью преобразования координат $x^{i'} = \theta^i(x)$, мы можем обратить в нуль некоторые компоненты $\underset{q}{\xi}{}^i$ введенного выше косонормального репера. Системы $X_1\theta = X_2\theta = X_4\theta = X_5\theta = 0$, $X_1\theta = X_4\theta = 0$ и уравнения $X_1\theta = 0$, $X_4\theta = 0$ вполне интегрируемы. Первая система имеет два решения θ^3 и θ^6, вторая система четыре решения, два из которых можно выбрать совпадающими с θ^3 и θ^6, а другие обозначим через θ^2 и θ^5. Уравнения имеют решения θ^q $(q \neq 1)$ и θ^p $(p \neq 4)$. После преобразования координат получим

$$\underset{r}{\xi}{}^i = P(x)\delta_r{}^i, \quad \underset{s}{\xi}{}^3 = \underset{s}{\xi}{}^6 = 0, \quad r = 1, 4, s = 2, 5. \quad (3)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых производных $\partial/\partial x^i$ в правых и левых частях равенств (2), с помощью формул (1) и (3) получим систему дифференциальных уравнений в частных производных на компоненты $\underset{i}{\xi}{}^j$ косонормального репера. Проинтегрировав эту систему уравнений с удачно подобранными преобразованиями координат (подобные выкладки можно найти, например, в статьях [3] и [4]), а затем применив формулы (см. [2])

$$g^{ij} = \sum_{h=1}^{6} e_h \underset{h}{\xi}{}^i \underset{\tilde h}{\xi}{}^j, \quad \underset{h}{\xi}{}_i = g_{ij}\underset{h}{\xi}{}^j, \quad a_{ij} = \sum_{h,l=1}^{n} e_h e_l \overline{a}_{hl} \underset{\tilde h}{\xi}{}_i \underset{\tilde l}{\xi}{}_j,$$

мы найдем компоненты тензоров g_{ij} и a_{ij}.

Сформулируем результат в виде следующей теоремы.

Теорема. *Если тензор h_{ij} типа* [(33)] *и функция φ удовлетворяют в V^6 уравнениям Эйзенхарта, то существует голономная система координат, в которой тензоры g_{ij}, h_{ij} и функция φ определяются формулами*

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_1\{(dx^2)^2 + 2dx^1 dx^2 + \theta(dx^3)^2\} + e_4\{(dx^5)^2 + 2dx^4 dx^6 + \omega(dx^6)^2\},$$

$$a_{ij}dx^i dx^j = \lambda g_{ij}dx^i dx^j + 2e_1 dx^1 dx^3 + 2e_4 dx^4 dx^6, \quad h_{ij} = a_{ij} + c g_{ij}, \quad \varphi = const,$$

где θ, ω – произвольные функции переменных x^3, x^6, c, λ – const.

Каждому решению h_{ij} уравнения Эйзенхарта соответствует первый квадратичный интеграл уравнений геодезических $(h_{ij} - 4\varphi g_{ij})\dot x^i \dot x^j = \mathrm{const}$, где $\dot x^i$ — касательный вектор геодезической, тензоры h_{ij}, g_{ij} и функция φ указаны в теореме.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00291 А).

Литература

1. Эйзенхарт Л. П. *Риманова геометрия*. – М.: ИЛ, 1948. – 316 с.

2. Аминова А. В. *Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий* // УМН. – 1995. – Т. 50. – № 1. – С. 69–142.

3. Закирова З. Х. *Метрики 6-мерных h-пространств типов [3(21)], [(32)1], [(321)]* // Краткие сообщения по физике ФИАН. – 2011. – Т. 38. – № 9. – С. 270–274.

4. Закирова З. Х. *О некоторых специальных решениях уравнения Эйзенхарта* // Уфимский матем. журнал. – 2013. – Т. 5. – № 3. – С. 41–53.

THE GEOMETRY OF 6-DIMENSIONAL h-SPACE FOR [(33)] TYPE

Z.Kh. Zakirova

Study of geometric properties of higher-dimensional manifolds is a topical problem, which is theoretically important and has numerous applications. For instance, space-time symmetries give rise to energy, momentum and angular momentum conservation laws. In particular, the infinitesimal projective and affine transformations lead to fundamental conservation laws in field theory and classical mechanics that possess a form of quadratic first integrals of the geodesics equations. Interest to higher-dimensional manifolds is also due to advances in supersymmetric and supergravity theories. The point here is that the supersymmetry leads, in a sence, to increasing the dimension of the manifold. The aim of this paper is to investigate the 6*-dimensional pseudo-Riemannian space* $V^6(g_{ij})$ *with signature* $[++----]$*, which admits continuous transformation groups preserving geodesics. In this note we find the metric of* h*-space for* [(33)] *type and then determine the quadratic first integral of the geodesic equations for these* h*-space.*

Keywords: differential geometry, pseudo-Riemannian manifolds, systems of partial differential equations.

УДК 517.544

СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ОСОБОМ СЛУЧАЕ

Н.Ю. Зонова[1], И.Г. Салехова[2]

1 *nina-zonova@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, механико- математический институт

2 *jlysia.salekhova@ksu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, механико- математический институт

Решено характеристическое сингулярное интегральное уравнение, когда контуром является объединение счетного числа периодически расположенных отрезков, а также в случае счетного множества отрезков, периодически расположенных в правой полуплоскости. Решение задачи получено путем сведения к соответствующей задаче Римана.

Ключевые слова: интегральное уравнение, задача Римана, однопериодическое расположение отрезков,однопериодическая функция, целая функция, мероморфная функция.

Сообщение посвящено решению характеристического сингулярного интегрального уравнения